Mathematik 2 für Informatiker - 3. Übung am 30.10.2007

1 Beispiel 31

Angabe

$$\int_0^\infty xe^{-x}$$

Grundlagen

Uneigentliches Integral:

$\int_0^\infty f(x)dx$ ist ein uneigentliches Integral (2. Art) und aufgrund des unbestimmten Integrationsbereiches nicht ad hoc lösbar. Um den umbestimmten Integrationsbereich auf einen bestimmten zruückzuführen, wird (für die unbestimmte Grenze) der limes des Integrals gebildet (dabei muß die Funktion auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$integrierbar sein): $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx$

Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Unbestimmtes Integral:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} stetig, \quad F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)\,; \quad \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Lösung

Das unbestimmte Integral wird zunächst auf ein bestimmtes rückgeführt:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx := \lim_{T\to\infty} \int_0^T xe^{-x}dx$$

Jetzt wird das Integral mit den neuen Grenzen berechnet:

$$\begin{aligned}\int_0^T xe^{-x}dx &= (-x-1)e^{-x}\Big|_0^T = \\ &= (-T-1)e^{-T} - (\pm 0 - 1)e^{-0} = \\ &= -Te^{-T} - e^{-T} + 1 =\end{aligned}$$

Wiedereingesetzt:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T xe^{-x}dx = \lim_{T\to\infty} -Te^{-T} - e^{-T} + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 \qquad \Box$$

2 Beispiel 63

Angabe

Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

$$\text{a)} z = x^2 - y^2 \qquad \text{b)} z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

Grundlagen

Definitionsbereich

Für eine Funktion $y = f(x)$ bezeichnet der **Definitionsbereich** D alle x-Werte, denen sich y-Werte zuordnen lasssen.[1]

Wertebereich

(s. o.): ... alle y-Werte bilden den **Wertebereich** W der Funktion $f(x)$.[2]

Höhenlinien

Das Bild der Funktion $z = f(x, y)$ kann auch mit Hilfe von Schnittkurven ermittelt werden, die durch Schnitte parallel zu den Koordinatenebenen entstehen. Die Schnittkurven $z = const$ werden auch **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** genannt.

Lösung 63 a)

(Annahme: Da in der Vorlesung bisher keine Funktionen über $\mathbb{C}$ behandelt wurde, schließe ich die komplexen Zahlen auch hier aus)

Da die Funktion $z = x^2 - y^2$ von zwei Variablen abhängt, ist der **Definitionsbereich** $D = a, b \in \mathbb{R}$ bzw. $D = \mathbb{R}^2$.

Der **Wertebereich** ist $\mathbb{R}$, da die Funktion keine Einschränkungen bzgl. der Lösbarkeit aufweist.

Zur Beschreibung der **Höhenlinien** wird z konstant gewählt, und die Funktion nur von einer Variablen abhängig gemacht: $z_0 = x^2 - y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - z_0}$. Lässt man nun z_0 diskrete Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen, ergeben die einzelnen Schnittkurven die Höhenlinien.

Anschaulicher werden die Höhenlinen allerdings, wenn man die Funktion umformt: $z_0 = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = z_0$. Dies ist eine Hyperbelgleichung, die Höhenlinien haben also die Form von Hyperbeln. Die Asymptoten (Mittelpunkt $(0, 0)$, Hauptachse als x-Achse) werden dann durch $y = \pm\sqrt{x^2 - z_0}$ beschrieben. Setzt man nun $z_0 = 0$ ergeben sich die Diagonalen zu den Hauptachsen des Koordinatensystems. Die anderen Höhenlinien sind dazu verschobene Hypberbel. $\square$

Lösung 63 b)

Für den **Definitionsbereich** der Funktion $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ darf der Radikant nicht negativ sein: $1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1$. Somit ist $D = \left\{ x, y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$.

Der **Wertebereich** beginnt bei 0 (Radikant $> 0!$) und reicht bis 1, für $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0$: $W = [0, 1]$.

[1] vgl. Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühling: Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage, 1999, S. 47
[2] vgl. Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühling: Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage, 1999, S. 47

Für die **Höhenlinien** setzten wir wieder $z_0 = 0$: $z_0 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$. Setzten wir nun $z_0 = 0$: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, so erhalten wir die Gleichung einer Ellipse. Stellen wir nun y frei:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \\
z_0^2 &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \\
36z_0^2 &= 36 - 9x^2 - 4y^2 \\
y^2 &= 9 - \frac{9}{4}x^2 - 9z_0^2 \\
y &= \sqrt{9 \cdot \left(1 - z_0^2 - \frac{x^2}{4}\right)} \\
y &= \pm 3 \cdot \sqrt{1 - z_0^2 - \frac{x^2}{4}}
\end{aligned}$$

Für y^2 gibt sich wieder eine Abwandlung der Ellipsengleichung, die Höhenlinien sind daher Ellipsen. $\square$

3 Beispiel 78

Angabe

Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n)$$

Ungelöst!

4 Beispiel 80

Angabe

Man untersuche für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t)$. Ist die Funktion $f(x, y)$ an $(0, 0)$ stetig?

$$f(x, y) = \frac{|y|}{|x^3| + |y|} \qquad (x, y) \neq (0, 0) \qquad f(0, 0) = 1$$

$$\alpha$$

Grundlagen

Stetigkeit eine Funktion mit mehreren Veränderlichen: $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ stetig an $x_0 \in \mathbb{R}^k :\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Lösung

$$\alpha t = x \qquad \beta t = y$$

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t) = \frac{|\beta t|}{|\alpha t|^3 + |\beta t|} = \frac{|t| \cdot |\beta|}{|t| \cdot \left(|\alpha|^3 \cdot |t| + |\beta|\right)} = \frac{|\beta|}{\underbrace{|\alpha|^3 \cdot |t|^2}_{\to 0} + |\beta|} = 1$$

D.h. die Funktion ist stetig für $\beta \neq 0$. Es läßt sich jedoch eine Annäherung finden, sodass der Grenzwert nicht dem Funktionswert an der Stelle $(0,0)$ entspricht:

$$a = 1 \qquad b = 0$$

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t \to 0} f(t, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{0}{|t|^3} = 0 \neq 1$$

Daraus folgt, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist. $\square$

5 Beispiel 96

Angabe

Man bestimmt die partiellen Ableitungen:

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$$

Grundlagen

Partielle Ableitung von Funktionen mit zwei Variablen $f(x,y)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Qutionenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ableitung des Arkustangens

$$\arctan x' = \frac{1}{1+x^2}$$

Kettenregel des Differenzierens: $F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Lösung

$$f'(x,y) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\begin{aligned} f'(g(x)) = & \quad \frac{1}{1+\left(\frac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)^2} \quad = \\ = & \quad \frac{(1+x+y)^2}{16x^4y^4+(1+x+y)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{(8xy^2)(1+x+y) - (4x^2y^2)\cdot 1}{(1+x+y)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad \frac{(1+x+y)^2}{16x^4y^4+(1+x+y)^2} \cdot \frac{(8xy^2)(1+x+y)-(4x^2y^2)\cdot 1}{(1+x+y)^2} \quad = \\ = & \quad \frac{\left(8xy^2(1+x+y)-4x^2y^2\right)\cdot(1+x+y)^2}{(16x^4y^4+(1+x+y)^2)\cdot(1+x+y)^2} \quad = \\ = & \quad \frac{8xy^2+4x^2y^2+8xy^3}{16x^4y^4+(1+x+y)^2} \end{aligned}$$

Führt man die Ableitung für y durch, erhält man

$$f'(x) = \frac{8x^2y + 4x^2y^2 + 8x^3y}{16x^4y^4\,(1+x+y)^{\,2}} \qquad \square$$

Helmut Eberharter, mailto: 9926931(at)student(dot)tuwien.ac.at