Mathematatik 2 für Informatiker - 2. Übung am 23.10.2007

1 Beispiel 25

Angabe

$$\int_1^2 \left(\sqrt[4]{x\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)}\right)^5 dx$$

Grundlagen

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$f : [a,b] \to \mathbb{R} stetig, \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)\,; \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Lösung

Zunächst im zu integrierenden Ausdruck alle Wurzeln und Klammern vereinfachen:

$$\int_1^2 \left(\sqrt[4]{x\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)}\right)^5 dx = \int_1^2 \left(\sqrt[4]{x\sqrt{x}}\right)^5 dx = \int_1^2 \sqrt[8]{x^{15}} dx$$

Hiervon lässt sich leicht die Stammfunktion angeben:

$$F\left(\sqrt[8]{x^{15}}\right) = \frac{8}{23} x^{\frac{23}{8}}$$

Und nun wird das bestimmte Integral nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bestimmt:

$$\int_1^2 \left(\sqrt[8]{x^{15}}\right) dx = \frac{8}{23}\left(\sqrt[8]{2^{23}} - \sqrt[8]{1^{23}}\right) = \frac{8}{23}\left(4 \cdot \sqrt[8]{2^7} - 1\right) \quad \square$$

2 Beispiel 41

Angabe

$$\int x \arctan(x) dx$$

Grundlagen

Partielle Integration:$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Lösung

Zu Beginn wird partiell integriert, wobei $f(x) = x$ und $g(x) = \arctan(x)$, dann ist $f'(x) = \frac{x^2}{2}$ und $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} \int x \arctan(x) dx &= \tfrac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \int \tfrac{x^2}{2} \cdot \tfrac{1}{1+x^2} dx \quad = \\ &= \tfrac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{x^2}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

Nun muß arctan nicht mehr integriert werden, und wir lösen das neue Integral, wobei $\frac{x^2}{1+x^2}$ durch $\frac{1+x^2-1}{1+x^2}$ ersetzt wird:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int 1 - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x$$

Wieder in die Lösung der partiellen Integration eingesetzt erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} \int x \arctan(x) dx &= \tfrac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \left(x - \arctan(x)\right) \quad = \\ &= \tfrac{1}{2} \left(x^2 + 1\right) \arctan x - \tfrac{1}{2} x \qquad \Box \end{aligned}$$

3 Beispiel 43

Angabe

$$\int x (\ln x)^2 dx$$

Grundlagen

Partielle Integration: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Kettenregel des Differenzierens: $F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Lösung

Partielle Integration mit $f'(x) = x$ und $g(x) = (\ln(x))^2$. $f(x) = \frac{x^2}{2}$. $g'(x)$ wird mittels der Kettenregel bestimmt:

$$g'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = 2 \frac{\ln x}{x}$$

Nun wird wiederholt partiell Integriert:

$$\begin{aligned} \int x (\ln x)^2 &= \tfrac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \int \tfrac{1}{2} x^2 \cdot 2 \tfrac{\ln x}{x} dx && = \\ &= \tfrac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot \ln x \; dx && = \\ &= \tfrac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \tfrac{x^2}{2} \cdot \ln x + \int \tfrac{x^2}{2} \cdot \tfrac{1}{x} dx && = \\ &= \tfrac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \tfrac{x^2}{2} \cdot \ln x + \tfrac{x^2}{4} && = \\ &= \tfrac{x^2}{2} \cdot \left((\ln x)^2 - \ln x + {}^1\!/_2\right) && \Box \end{aligned}$$

4 Beispiel 45

Angabe

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

Grundlagen

Substitutionsregel: $\int f((g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c$ **wobei** $F'(x) = f(x)$

Partialbruchzerlegung

Logarithmusgesetz: $log_b(x \cdot y) = log_b x + log_b y$

Lösung

Substitution:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow\quad& x = z^2 - 1 \\ x' = \frac{dx}{dz} &= 2x &\Leftrightarrow\quad& dx = 2x\ dz \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{z}{z^2-1} 2z\ dz$$

Vereinfachen von $\frac{z^2}{z^2-1}$:

$$\frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z^2-1+1}{z^2-1} = \frac{z^2-1}{z^2-1} + \frac{1}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{(z^2+1)(z^2-1)}$$

Und den letzten Term per Partialbruchzerlegung (2. Methode) aufteilen:

$$\frac{1}{(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{A}{(z+1)} \cdot \frac{B}{(z-1)}$$

$$\begin{array}{llll} & 1 = A(z-1) + & B(z+1) & \\ z = -1: & 1 = -2A & +0 & \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ z = +1: & 1 = 0 & +2B & \Rightarrow B = +\frac{1}{2} \end{array}$$

Nun wird das ganze wieder in das substituierte Integral eingefügt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\int 1dz - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z+1} dz + \frac{1}{2} \int \frac{1}{z-1} dz \right) &= \\ =2 \cdot \left(z - \frac{1}{2} \cdot \ln(z+1) + \frac{1}{2} \cdot \ln(z-1) \right) &= \\ =2 \cdot z - (ln(z+1) - ln(z-1)) & \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Logarithmen $ln(z+1) - ln(z-1) = ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

$$= 2 \cdot z - ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Und rücksubstitutieren von x:

$$\begin{aligned}
=&2\sqrt{x+1} - ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right) && = \\
=&2\sqrt{x+1} - ln\left(1 + \frac{2}{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right)\Box
\end{aligned}$$

5 Beispiel 46

Angabe

$$\int (x^2+1)e^{-2x}dx$$

Grundlagen

Partielle Integration: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Lösung

Partielle Integration mit $f'(x) = e^{-2x}$ und $g(x) = x^2+1$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2+1) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot 2x\ dx \\
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2+1) + \int e^{-2x} \cdot x
\end{aligned}$$

Wiederum partiell Integrieren, wobei $f'(x) = e^{-2x}$ und $g(x) = x$:

$$\begin{aligned}
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2+1) + \int e^{-2x} \cdot x = \\
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2+1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot 1\right) = \\
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2+1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\right) = \\
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2+1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right) = \\
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \left(x^2+1+x+\frac{1}{2}\right) = \\
=&-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \left(x^2+x+\frac{3}{2}\right) \qquad \Box
\end{aligned}$$

Helmut Eberharter, mailto: 9926931(at)student(dot)tuwien.ac.at