Mathe 1
Übungsbsp.

144 | 152 | 162 | 195 | 196

15.05.2007 <u>144</u> Berechne unter Benutzung des Binomischen Lehrsatzes!

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!}$$ | k kürzen

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$ | n herausheben (n

$$n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}_{= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}}$$

$$n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}$$ | für k=0 ist der Summand 0, also lassen wir den Index bei 1 beginnen

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}$$ | Index wieder auf

$$n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k}$$ | (-1) herausheben, $(1)^{n-1-k}$ einfügen

$$-1 \cdot n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k}$$

=

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

=

$$-1n\,(x+y)^{n-1} = -1n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k (1)^{n-1-k}$$

$\Rightarrow x = 1,\ y = -1 \quad \Rightarrow (x+(-y)) = 0 \quad \Rightarrow \sum [..] \underline{= 0}$

$\Rightarrow -n(-1+1)^{n-1} = -n \cdot 0 = 0$

BRUNNEN

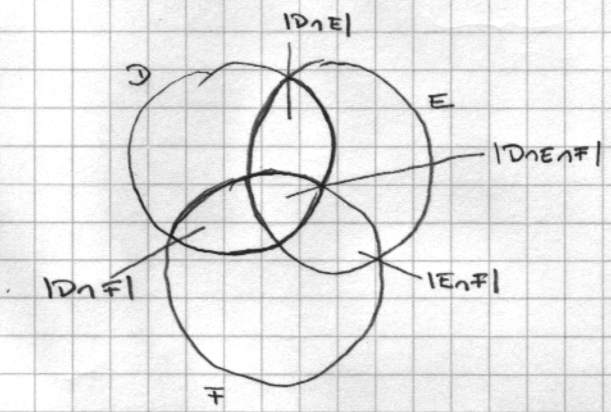
152 In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 7 Englisch, 5 Französisch, 6 Deutsch & Englisch, 4 Deutsch & Französisch, 3 Englisch & Französisch, 3 alle Sprachen, und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

Deutsch ≙ D:

$\lvert D\rvert = 10$	$\lvert D\cap E\rvert = 5$	$\lvert D\cup E\cup F\rvert = n$
$\lvert E\rvert = 9$	$\lvert D\cap F\rvert = 7$	$\lvert D\cap E\cap F\rvert = 3$
$\lvert F\rvert = 9$	$\lvert E\cap F\rvert = 4$	$\lvert (D\cup E\cup F)'\rvert = \emptyset$

$$n = |D| + |E| + |F| - |D\cap E| - |D\cap F| - |E\cap F| + |D\cap E\cap F| =$$

$$= 10 + 9 + 9 - 5 - 7 - 4 + 3 = 15$$



162 Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, in denen weder der Block "acg" noch der Block "cgbe" vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen e-e n-elementigen Menge ist $n!$.)

= Auswahlen ohne Wiederholung, $n = 8$, $|P(8)| = 8! = 40\,320$

Anordnungsmöglichkeiten für "acg": 6 Anordnungen, 5 (8-3) Buchst. anordnbar

— " — $= 6 \cdot 5! = \underline{720}$ bzw. $6 \cdot 5! = 6!$ (1)

— " — für "cgbe": 5 Anordnungen, 4 (8-4) Buchst. anordnbar

— " — $= 5 \cdot 4! = \underline{120}$ (2)

Lösung $= 8! - 5 \cdot 4! - 6 \cdot 5! = \underline{\underline{39\,480}}$ $+ 4! = \underline{\underline{39\,504}}$

(1) es gibt 5 Zeichen und einen Block = 6 Elemente die ang. werden können = 6!

(2) analog

195. Man zeige, daß es in jedem einfachen Graphen G mit $n \geq 2$ Knoten wenigstens zwei Knoten mit gleichem Knotengrad gibt.

Jeder Knoten hat min. Grad 0 und max $n-1$.

Ang. alle Knoten haben untersch. Grad, dann lautet die Gradfolge $0, 1, 2, \ldots, n-1$

↯ da kein Graph gl. einen Knoten von dem eine Kante zu allen anderen Knoten geht (Grad $n-1$), und einen isolierten Knoten (Grad 0) haben kann.

formal:

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $\quad d(v) = \{\cancel{0}, 1, 2, \ldots, n-1\}$ $^{(*)}$ (da der Knoten mit Grad 0 weggelassen werden kann: n Knoten, n-1 Grade)

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists\, v_k, v_l \;\; d(v_k) = d(v_j)$

196. Unter n Mannschaften wird ein Turnier ausgetragen, und es haben insg. schon n+1 Spiele stattgefunden. Man zeige, daß min. e. Mannschaft dann bereits min. 3 Spielen teilgenommen hat.

Graphentheoretisch:

Da e-e Mannschaft nicht gegen sich selber spielen kann $\Rightarrow$ einfacher Graph

$G = (V, E)$ $\quad |V| = n$, $|E| = n+1$ $\quad$ $^{(*)}$ Handschlag-Lemma

Beh: $\exists v : d(v) \geq 3$

Bew: $\sum d(v) = 2 \cdot |E| \overset{(*)}{=} \underline{2n+2}$

ang. $d(v) \leq 2 \;\; \forall v \in V$

$\Rightarrow \sum d(v) \leq \underline{2n}$ ↯

Jede Mannschaft 2 Spiele: $2 \cdot \frac{n}{2} = n$

n+1 Spiele: 2 Mannschaften spielen 3 mal! $\square$

für ungerades n betrachten wir n+1 und erhalten das gleiche Ergebnis