Mathe 1
Übungs-Bsp.

17.04.2007

① 4 Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgenden Äquivalenzen richtig sind.

$$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

a	b	c	b∨c	a∧(b∨c)	a∧b	a∧c	(a∧b)∨(a∧c)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$=$

Äquivalenz gilt ✓ (s.a. Distributivgesetz)

6 Wie 4

$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow \neg(b \rightarrow a)$$

a	b	a↔b	a→b	b→a	¬(b→a)	(a→b)→¬(b→a)
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0

$\neq$

Äquivalenz gilt NICHT!

Mathe 1
Übungs-Bsp.
17.4.2007

② **79** Lösen Sie die folgenden Kongruenzen (d.h. Gleichungen in Restklassen in $\mathbb{Z}$) bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$):

a) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod 5$

b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod 6$

a) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod 5$

$(x-1)(x-2) \equiv 0 \pmod 5 \iff$

$5 \mid (x-1)(x-2) \Rightarrow (x-1) = 0 \vee (x-2) = 0 \Rightarrow$

$\underline{\underline{x = \bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_5}}$

$(x-1) = 5 \vee (x-2) = 5$ ist in $\mathbb{Z}_5$ nicht lösbar!

b) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod 6$

$(x-1)(x-2) \equiv 0 \pmod 6 \iff$

$6 \mid (x-1)(x-2) \iff$

$2 \cdot 3 \mid (x-1)(x-2)$ da entweder $(x-1) \vee (x-2)$ immer gerade ist, gilt $2 \mid (x-1)(x-2)$ immer!

$3 \mid (x-1)(x-2) \Rightarrow (x-1) = 0 \vee (x-2) = 0 \Rightarrow$

$x = \bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_3$

Lösung in $\mathbb{Z}_6$: $\{\bar{1}, \bar{2}, \overline{1+3}, \overline{2+3}\} =$

$\underline{\underline{\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5} \in \mathbb{Z}_6\}}}$

Mathe 1

Übungs-Bsp 75 Lösen Sie folgende Kongruenzen (d.h. Gleichungen in Restklassen in $\mathbb{Z}$) bzw. beweisen Sie die (Un)lösbarkeit (in $\mathbb{Z}$):

12.04.2007

③

a) $6x \equiv 3 \pmod 9$

b) $6x \equiv 4 \pmod 9$

Definition:
$a \equiv b (m)$ gilt, wenn $m \mid a-b$

Lösbarkeit:
$ax \equiv b (m)$ ist lösbar, wenn $ggT(a,m) \mid b$

Anzahl d. Lösungen:
$ggT(a,m)$

Rechenregeln:

- $a \equiv b (m) \wedge c \equiv d (m) \Rightarrow a+c \equiv b+d (m)$
- $a \equiv b (m) \wedge c \equiv d (m) \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d (m)$
- $a \cdot c \equiv b \cdot c (m) \wedge ggT(c,m) = 1 \Rightarrow a \equiv b (m)$
- $a \cdot c \equiv b \cdot c (m) \wedge c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \left(\frac{m}{ggT(c,m)}\right)$

a) • Ist a) lösbar? Wieviele Lösungen gibt es?

$ggT(6,9) = 3 \qquad 3 \mid 3 \rightarrow$ Es existieren 3 Lösungen!

$6x \equiv 3 \pmod 9$

$2x \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \pmod{3 \cdot 3}$

$2x \equiv 1 \pmod 3$ • $ggT(2,3) = 1 \qquad 1 \mid 1 \rightarrow$ Es existiert genau 1 Lsg!

$x = \overline{2} \in \mathbb{Z}_3$

in $\mathbb{Z}_9$?

$x_1 = \overline{2} + 0 = \overline{2}$
$x_2 = \overline{2} + 3 = \overline{5}$
$x_3 = \overline{2} + 6 = \overline{8}$

Warum? Gesucht sind 3 Lsg, die in $\mathbb{Z}_3$ kongruent, in $\mathbb{Z}_9$ jedoch inkongruent sind!

$x = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8} \in \mathbb{Z}_9\}$

b) • Ist b) lösbar?

$ggT(6,9) = 3 \qquad 3 \nmid 4 \rightarrow$ b) ist unlösbar!

Warum? $6x \equiv 4 \Leftrightarrow 9 \mid (6x-4) \Leftrightarrow 9 \cdot k = 6x-4, \; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$9k+4 = 6x \Leftrightarrow \frac{9k+4}{6} = x \Leftrightarrow$

$\frac{3}{2}k + \frac{2}{3} = x$! Da $k \in \mathbb{Z}$ ist keine Lösung möglich!

QED