Mathe 1
Übung-Bsp
15.03.2007

1

29) Man überprüfe die Gleichung

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die ersten fünf natürlichen Zahlen und beweise sodann deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

$P(1)$ $\quad 1^2=1 \quad \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1$ ✓

$P(2)$ $\quad 1^2+2^2=5$

$$\frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}=5 \quad ✓$$

$P(3)$ $\quad 1^2+2^2+3^2=14$

$$\frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6}=\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6}=14 \quad ✓$$

$P(4)$ $\quad 1^2+2^2+\ldots+4^2=30$

$$\frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6}=\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6}=30 \quad ✓$$

$P(5)$ $\quad 1^2+2^2+\ldots+5^2=55$

$$\frac{5(5+1)(2\cdot 5+1)}{6}=\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}=55 \quad ✓$$

$P(n+1)$ durch vollst. Induktion:

IA: $P(1)$ s.o.

IS:

IV: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

IB: $\underbrace{1^2+2^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{1}{6}(2n^3+9n^2+13n+6)$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3+9n^2+13n+6) \qquad \underline{\underline{\text{QED}}}$$

Mathe 1
Übungs-Bsp
15.03.2007

(2)

36) Man beweise mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n} \qquad (n \geq 2)$$

P(2) $\frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

IA: P(2)

IS:

IV: $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n}$

IB: $\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\underbrace{\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)}} + \frac{1}{(n+1)(n)}$$

$$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)n} = \frac{(n-1)(n+1)+1}{(n+1)n} = \frac{n^2}{(n+1)n} = \frac{n}{n+1}$$ QED

38) Man beweise mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{j=1}^{n} j\,3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4} \qquad (n \geq 1)$$

P(1) $3^0 = 1$

$\frac{3(2-1)+1}{4} = 1$ ✓

IA: P(1)

IS:

IV: $\sum_{j=1}^{n} j\,3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4}$

IB: $\sum_{j=1}^{n+1} j\,3^{j-1} = \frac{3^{n+1}(2(n+1)-1)+1}{4} = \frac{1}{4}(3^{n+1}(2n+1)+1)$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} j\,3^{j-1}} + (n+1)\,3^{(n+1)-1}$$

$$\frac{3^n(2n-1)+1}{4} + (n+1)3^n = \frac{1}{4}\left(3^n(2n-1)+1+3^n 4(n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(6n3^n + 3\cdot 3^n + 1) = \frac{1}{4}(3^n(6n+3)+1) =$$

$$= \frac{1}{4}(3^{n+1}(2n+1)+1)$$ QED

Mathe 1
Übungs-Bsp.
15.03.2007

3

25) Zeigen Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist. ausführlich!

indirekter Beweis mit:

Annahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ d.h. $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$\frac{m}{n}$ liegt vollständig gekürzt vor!

<u>Beweis:</u>

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$$

$$\left(\frac{m^2}{n^2} = 3 \right)$$

$$\left(3n^2 = m^2 \right)$$

$$n^2 = \frac{m^2}{3}$$

m^2 ist durch 3 teilbar, also muß auch m durch 3 teilbar sein: $m = 3r$, $r \in \mathbb{Z}$!

$$3n^2 = (3r)^2$$

$$\left(3n^2 = 3^2 r^2 \right)$$

$$\left(3n^2 = 9 r^2 \right)$$

$$\left(n^2 = 3r^2 \right)$$

$$\frac{n^2}{3} = r^2$$

n^2 ist durch ... % $n = 3s$, $s \in \mathbb{Z}$!

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{r}{s}$ Widerspruch! <u>QED</u>

44) Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt: $9n^3 - 3 \leq 8^n$

P(0) $9 \cdot 0 - 3 \leq 1$ ✓ P(1) $9 \cdot 1 - 3 \leq 8^1$ ✓

P(2) $9 \cdot 8 - 3 \leq 64$ × P(3) $9 \cdot 27 - 3 \leq 512$

P(n+1) durch vollständige Induktion

IA: P(3) IS:

IV: $9n^3 - 3 \leq 8^n$

IB: $9(n+1)^3 - 3 \leq 8 \cdot (9n^3 - 3)$

$27n^2 + 27n + 9 + (9n^3 - 3) \leq 8 \cdot (9n^3 - 3)$ $| -9$

$27n^2 + 27n + 9 \leq 63n^3 - \cancel{30}$ $| :n$

$27n \leq 63n^2 - \cancel{27}$ $| :n$

$27 \leq 63n$

✓ weil $n \geq 3$

<u>QED</u>