Mathematik 2 für Informatiker - 6. Übung am 20.11.2007

1 Beispiel 113

Angabe

Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

(a) in Richtung der Koordinatenachsen,

(b) in Richtung von (-1,-1), sowie

(c) in Richtung von grad$f$.

Grundlagen

Lösung

(a)

in Richtung x-Achse: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + 4y^2) = 2x$ im Punkt $P_0(3,2)$: $2 \cdot 3 = 6$

in Richtung y-Achse: $\frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + 4y^2) = 8y$ im Punkt $P_0(3,2)$: $8 \cdot 2 = 16$

(b) in Richtung $(-1,-1)$

$\underline{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{p}$ normieren: $\|\underline{p}\| = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{e} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(P_0) = grad\ f(P_0) \cdot \underline{e} = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{-6}{\sqrt{2}} + \frac{-16}{\sqrt{2}} = \frac{-22}{\sqrt{2}} \simeq -15,5565$$

(c) in Richtung $grad\ f$

Richtungsableitung in Richtung $grad\ f(P_0) = \|grad\ f(P_0)\|$

$$= \left\| grad\ f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 6 \\ 16 \end{matrix} \right\| = \sqrt{6^2 + 16^2} = \sqrt{292} = 17,088$$

2 Beispiel 117

Angabe

Es sei $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$. Man berechne y' und y".

Grundlagen

Lösung

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 3x^2 - 3y + 0 - 0 = 3x^2 - 3y \\ F_y(x,y) &= 0 - 3x + 3y^2 - 0 = -3x + 3y^2 \end{aligned}$$

$$y'(x) = -\frac{3x^2 - 3y}{(-3x + 3y^2)} = \frac{3x^2 - 3y}{3x - 3y^2} \qquad (F_y \neq 0!)$$

$$y"(x) = \frac{2F_xF_yF_{xy} - F_y^2F_{xx} - F_x^2F_{yy}}{F_y^3}$$

$$\begin{aligned} F_{xx} &= 6x \\ F_{xy} = F_{yx} &= -3 \\ F_{yy} &= 6y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y"(x) &= \frac{2(3x^2 - 3y)(-3x + 3y^2)(-3) - (3x + 3y^2)^2 \cdot (-3) - (3x^2 - 3y)^2 \cdot (-3)}{(-3x + 3y^2)^3} = \\ &= \frac{2(3x^2 - 3y)(-3y + 3y^2)(-3) - (3x + 3y^2)^2 \cdot (-3) - (3x^2 - 3y)^2 \cdot (-3)}{(-3x + 3y^2)^3} = \end{aligned}$$

3 Beispiel 120

Angabe

In welchen Punkten der Kurve $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ sind die Tangenten horizontal, in welchen vertikal?

Lösung

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 4y \\ F_y &= 4x + 32y \end{aligned}$$

(1) horizontale Tangente ($F_x = 0,\ F_y = k$)

$$\begin{aligned} &2x + 4y = 0 \quad \Rightarrow x = -2y \\ &4x + 32y = k \qquad\qquad \Rightarrow -8y + 32y = k \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow y = \frac{k}{24} \Rightarrow x = \frac{-k}{12} \end{aligned}$$

Für welches k ist die Gleichung gültig? (Welches k liegt auf der Kurve?)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{k}{12}\right)^2 + 4\left(-\frac{k}{12}\right)\left(\frac{k}{24}\right) + 16\left(\tfrac{k}{24}\right)^2 &= 27 \\ \frac{k^2}{12^2} + 4 \cdot \frac{-k^2}{12 \cdot 24} + 16 \cdot \frac{k^2}{24^2} &= 27 \qquad | \cdot 12 \cdot 12 \\ \frac{12k^2}{12} + 4 \cdot (-\frac{k^2}{2}) + 16 \cdot \frac{12k^2}{24 \cdot 2} &= 27 \\ k^2 - 4k^2 + 4k^2 &= 27 \\ 5k^2 &= 27 \\ k &= \pm 36 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(\pm 36)}{12} = \mp 3 \qquad y = \frac{\pm 36}{24} = \pm\frac{3}{2}$$

Die Funktion hat in den Punkten $(-3, {}^{3}\!/_{2})$ und $(3, -{}^{3}\!/_{2})$ eine horizontale Tangente.

(2) vertikale Tangente ($F_x = k,\ F_x = 0$)

$$\begin{aligned}
2x + 4y &= 0 & & \Rightarrow k = -12y \Rightarrow y = -\frac{k}{12} \\
4x + 36y &= 0 & \Rightarrow x = -8y & \\
& & & \Rightarrow x = \frac{2k}{3}
\end{aligned}$$

Welches k liegt auf der Kurve?

$$\begin{aligned}
x^2 + 4xy + 16y^2 &= 27 \\
\left(\frac{2k}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2k}{3} \cdot \frac{-k}{12}\right) + 16\left(\frac{-k}{12}\right)^2 &= 27 \qquad | \cdot 9 \\
4k^2 - 2k^2 + k^2 &= 27 \\
k^2 &= 9 \\
k &= \pm 3
\end{aligned}$$

$$x = \frac{2k}{3} = \pm 2 \qquad y = \frac{-k}{12} = \mp\frac{1}{4}$$

Die Funktion hat in den Punkten $(2, -{}^{1}\!/_{4})$ und $(3, -{}^{1}\!/_{4})$ eine vertikale Tangente.

4 Beispiel 123

Angabe

Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) - 2\left(x^2 - y^2\right)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Grundlagen

- (x_0, y_0) rel. Extremum von $f \Leftrightarrow grad\ f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (notwendige Bedinung)
- $grad\ f = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = (0, 0)$

Lösung

existieren rel. Extrema?$grad\ f(x_0, y_0) = (0, 0)$?

offensichtlich ist der Punkt $(0, 0)$ für $grad\ f = (0, 0)$

$$grad\ f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = (0, 0) \begin{array}{l} \Rightarrow f_x = 0 \\ \Rightarrow f_y = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
f_x &= 2(x^2 + y^2) \cdot (2x) - 4x = 4x(y^2 + x^2) - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1) \\
f_y &= 2(x^2 + y^2) \cdot (2y) + 4y = 4y(y^2 + x^2) + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 + 4xy^2 - 4x &&= 0 \qquad \mid : 4x \\ & x^2 + y^2 &&= 1 \\ & x &&= \pm\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y = && 4y(x^2 + y^2 + 1) &= 0 \qquad |x\ einsetzten \\ = && 4y\left(\pm\sqrt{1-y^2}\right)^2 + 4y^3 + 4y &= 0 \\ = && 4y(1-y^2) + 4y^3 + 4y &= 0 \\ = && 4y - 4y^3 + 4y^3 + 4y &= 0 \\ && y &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \pm\sqrt{1-y^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

es existieren also 3 mögliche Extremstellen: $(0,0)$, $(1,0)$ und $(-1,0)$:

- $(0,0)$

$$grad\ f(0,0) = 0$$

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 12x^2 + 4y^2 - 4 \\ f_{xy} = f_{yx} &= 8xy \\ f_{YY} &= 4x^2 + 12y^2 + 4 \end{aligned}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & grad\ f(0,0) = (0,0) \\ & f_{xx} < 0 \\ & f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = -16 < 0 \\ & D < 0 \Rightarrow Sattelpunkt \end{aligned}$$

- $(1,0)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & grad\ f(1,0) = (0,0) \\ & f_{xx} > 0 \\ & f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 0 \end{aligned}$$

- $(0,1)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & grad\ f(0,1) = (0,8) \\ & \Rightarrow es\ liegt\ kein\ Extremum\ vor \end{aligned}$$

5 Beispiel 128

Angabe

Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

$f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x + \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi/2$.

Grundlagen

Lösung

$$\begin{aligned} f_y &= \cos(x+y) \cdot 1 + \cos x &= 0 \\ f_y &= \cos(x+y) \cdot 1 + \cos y &= 0 \end{aligned}$$

beide Gleichungen von einander substrahieren, erlaubt, da x, y auf $[0, \pi/2]$ beschränkt sind

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= 0 \\ \cos x &= \cos y \\ x &= y \\ & \Rightarrow f_x: \ \cos(2x) + \cos(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\cos(2x) + \cos x = 0$$

Anm:

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
- $\Longrightarrow \cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\begin{aligned} \cos(2x) + \cos x &= 0 \\ 2\cos^2(x) + \cos x - 1 &= 0 \\ 2\cos^2(x) + \cos x &= 1 \end{aligned}$$

Hier komme ich nicht mehr weiter, den ganzen 'cosinus Ausdruck' ins maxima:

$$x_1 = -\pi \quad x_2 = \pi/3 \quad x_3 = -\pi/3$$

wobei $x_1$und x_3 ausserhalb des Definitionsbereiches sind, und nicht weiter betrachtet werden. Somit bleibt ein Punkt, der auf einen Extremwert untersucht wird: $(\pi/3, \pi/3)$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\sin(x+y) - \sin x \\ f_{xy} = f_{yx} &= -\sin(x+y) \\ f_{yy} &= -\sin(x+y) - \sin y \end{aligned}$$

- $(\pi/3, \pi/3)$

$$grad\ f(\pi/3, \pi/3) = (0,0)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -1.732 & -0.866 \\ -0.866 & -1.732 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D = 2.2499 &\quad > 0 \\ f_{xx} < 0 &\quad \Rightarrow rel.\ Min. \end{aligned}$$

Die Funktion hat im Definitionsbereich einen Extremwert, nämlich ein Minimum an der Stelle $(\pi/3, \pi/3)$

Helmut Eberharter, mailto: 9926931(at)student(dot)tuwien.ac.at