

# Theoretische Informatik und Logik

3. Übung am 31.10.2007

## Aufgabe 3.1

Sei  $L = \{(ww \mid w \in \{0, 1\}^*)\}$ . Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass  $L$  nicht regulär ist.

### Grundlagen

**Pumping Lemma:** Sei  $L$  eine unendliche reguläre Sprache. Es gibt eine Schranke  $m \geq 0$ , sodass jedes Wort in  $L$  mit  $|w| \geq m$  geschrieben werden kann als  $w = xyz$  mit  $|xy| \leq m$  und  $y \neq \varepsilon$ , sodass  $w_i = xy^i z$  ebenfalls in  $L$  liegt für alle  $i \geq 0$ .

### Lösung

Wählt man  $m$  für die Schranke aus dem Pumping Lemma (PL), und sei  $v = \underline{0}^m \underline{10}^m \underline{1} \in L$ , dann ist  $|v| = 2m + 2 \geq m$ . Sei nun weiter  $xyz$  eine Zerlegung von  $v$  und  $|xy| < m$ . Dann ist  $xy \in \{0\}^+$ ,  $y \neq \varepsilon$ . Dem PL folgend, muß eine Zerlegung  $xyz$  für  $v$  existieren, sodass  $|xy| < m$  und  $y \neq \varepsilon$ . Dann ist  $xy \in \{0\}^+$ , und gemäss PL,  $w_i = xy^i z \in L$  für alle  $i \geq 0$ . Also muß  $\underline{0}^{m-i} \underline{10}^m$  in  $L$  sein.

Ist es aber nicht  $\rightarrow L$  ist nicht regulär!  $\square$

## Aufgabe 3.2

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache  $L = \{\underline{a}^{2^n} \mid n > 0\}$  nicht regulär ist.

**Ungelöst!**

## Aufgabe 3.3

Sei  $G = \langle \{A, B, C\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{A \Rightarrow B\underline{a}C, B \Rightarrow \underline{a}B \mid \varepsilon, C \Rightarrow \underline{a}C \mid \underline{b}C \mid \varepsilon\}, A \rangle$ . Geben Sie eine reguläre Grammatik an, welche dieselbe Sprache wie  $G$  erzeugt.

### Grundlagen

**Grammatik:** Eine Grammatik (unbeschränkte oder Typ-0-Grammatik) wird durch ein Quadrupel  $\langle V, T, P, S \rangle$  beschrieben, wobei  $V$  das Alphabet der Variablen (Nonterminale),  $T$  das Alphabet der Terminalsymbole,  $P$  die Menge der Produktionen und  $S \in V$  das Startsymbol ist.  $V$  und  $T$  müssen disjunkt sein:  $V \cap T = \{\}$ . Die Menge der Produktionen,  $P$ , ist eine Teilmenge von  $(V \cup T)^+ \times (V \cup T)^*$ , d.h., eine Produktion ist ein Paar  $(\alpha, \beta)$ , mit der Einschränkung  $\alpha \neq \varepsilon$ . Statt  $(\alpha, \beta)$  wird üblicherweise  $\alpha \Rightarrow \beta$  geschrieben. Die Abkürzung  $\alpha \Rightarrow \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n$  steht für  $\alpha \Rightarrow \beta_1, \dots, \alpha \Rightarrow \beta_n$ .

**reguläre Grammatik:** Eine Grammatik heißt regulär (oder Typ-3-Grammatik), wenn alle ihre Produktionen die Form  $A \Rightarrow aB$  oder  $A \Rightarrow \varepsilon$  besitzen, wobei  $A, B$  Nonterminale und  $a$  ein Terminalsymbol ist.

## Lösung

$G: \quad V = \{A, B, C\} \quad T = \{a, b\} \quad S = \{A\} \quad P = \{A \Rightarrow B\underline{a}C, B \Rightarrow \underline{a}B \mid \varepsilon, C \Rightarrow \underline{a}C \mid \underline{b}C \mid \varepsilon\}$

Aus  $A \Rightarrow B\underline{a}C$ ,  $B \Rightarrow \underline{a}B$   $\mid \varepsilon$  und  $C \Rightarrow \underline{a}C \mid \varepsilon$  folgt:  $A \Rightarrow B\underline{a}C \Leftrightarrow A \Rightarrow \underline{a}C$ .

$G' = \langle \{A, B\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{A \Rightarrow \underline{a}C, C \Rightarrow \underline{a}C \mid \underline{b}C \mid \varepsilon\}, A \rangle$

Die akzeptierte Sprache ist dabei für  $G'$  und  $G$ :  $L = \underline{a} \{a, b\}^*$ .  $\square$

## Aufgabe 3.4

Sei  $G = \langle \{S\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{S \Rightarrow \underline{a}S \mid \underline{a}S\underline{b} \mid \underline{a}b\}, S \rangle$ . Zeigen Sie, dass  $G$  mehrdeutig ist, indem Sie für ein Wort  $w$  aus  $\mathcal{L}(G)$  (mit  $|w| \geq 5$ ) zwei verschiedene Linksableitungen und die zugehörigen Ableitungsbäume angeben. Konstruieren Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik  $G'$  mit  $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$  und geben Sie für das zuvor gewählte Wort aus  $\mathcal{L}(G)$  die Linksableitung, die Rechtsableitung sowie die Parallelableitung in Ihrer Grammatik  $G'$  an.

## Grundlagen

**kontextfreie Grammatik:** Eine Grammatik heißt kontextfrei (oder Type-2-Grammatik), wenn die linke Seite jeder Produktion ein einzelnes Nonterminalsymbol ist, d.h., wenn alle Produktionen die Gestalt  $A \Rightarrow \beta$  besitzen, wobei  $A \in V$  und  $\beta \in (V \cup T)^*$ . Eine Sprache  $L$  heißt kontextfrei, wenn es eine kontextfreie Grammatik  $G$  gibt, sodass  $\mathcal{L}(G) = L$ .

**Mehrdeutigkeit:** Eine Grammatik heißt mehrdeutig, wenn es ein Wort mit mehreren Linksableitungen gibt.

**Linksableitung:**  $xAy \vdash_L x\beta y$  gilt, falls  $A \Rightarrow \beta$  eine Produktion ist, und  $x$  nur aus Terminalsymbolen besteht ( $y \in T^*$ ).  $y$  ist ein beliebiges Wort aus  $(V \cup T)^*$ .

## Lösung

Für  $w \in \mathcal{L}(G) = \underline{aaab}$  finden sich folgende (unterschiedliche) Linksableitungen:

1.  $S \vdash_L \underline{a}S \vdash_L \underline{aa}S\underline{b} \vdash_L \underline{aaab}$
2.  $S \vdash_L \underline{a}S\underline{b} \vdash_L \underline{aa}S\underline{b} \vdash_L \underline{aaab}$

Um  $G'$  zu finden, ersetzt  $\underline{a}S$  durch  $\underline{a}A \mid \varepsilon$  und erweitere  $S$  um  $\underline{a}Ab$ :

$$G' \langle \{S, A\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{S \Rightarrow \underline{a}S\underline{b} \mid \underline{a}Ab, A \Rightarrow \underline{a}A \mid \varepsilon\}, S \rangle$$

Ableitungen für  $w \in \mathcal{L}(G')$ :

1.  $S \vdash_L \underline{a}A \vdash_L \underline{aa}S\underline{b} \vdash_L \underline{aaa}Ab \vdash_L \underline{aaab}$
2.  $S \vdash_R \underline{a}A \vdash_R \underline{aa}S\underline{b} \vdash_R \underline{aaa}Ab \vdash_R \underline{aaab}$
3.  $S \vdash_P \underline{a}A \vdash_P \underline{aa}S\underline{b} \vdash_P \underline{aaa}Ab \vdash_P \underline{aaab}$

## Aufgabe 3.5

Sei  $\Sigma$  ein binäres Alphabet und  $L = \{v \in \Sigma^* \mid |v| = 2n, n \geq 1, \text{ und } v \neq ww, w \in \Sigma^*\}$ . Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die  $L$  erzeugt.

**Ungelöst!**