

# Mathematik 2 für Informatiker - 2. Übung am 23.10.2007

## 1 Beispiel 25

### Angabe

$$\int_1^2 \left( \sqrt[4]{x \left( \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \right)} \right)^5 dx$$

### Grundlagen

#### Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } F(x) := \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x); \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### Lösung

Zunächst im zu integrierenden Ausdruck alle Wurzeln und Klammern vereinfachen:

$$\int_1^2 \left( \sqrt[4]{x \left( \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \right)} \right)^5 dx = \int_1^2 \left( \sqrt[4]{x\sqrt{x}} \right)^5 dx = \int_1^2 \sqrt[8]{x^{15}} dx$$

Hiervon lässt sich leicht die Stammfunktion angeben:

$$F \left( \sqrt[8]{x^{15}} \right) = \frac{8}{23} x^{\frac{23}{8}}$$

Und nun wird das bestimmte Integral nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bestimmt:

$$\int_1^2 \left( \sqrt[8]{x^{15}} \right) dx = \frac{8}{23} \left( \sqrt[8]{2^{23}} - \sqrt[8]{1^{23}} \right) = \frac{8}{23} \left( 4 \cdot \sqrt[8]{2^7} - 1 \right) \quad \square$$

## 2 Beispiel 41

### Angabe

$$\int x \arctan(x) dx$$

## Grundlagen

**Partielle Integration:**  $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

## Lösung

Zu Beginn wird partiell integriert, wobei  $f(x) = x$  und  $g(x) = \arctan(x)$ , dann ist  $f'(x) = \frac{x^2}{2}$  und  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ :

$$\begin{aligned}\int x \arctan(x)dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

Nun muß  $\arctan$  nicht mehr integriert werden, und wir lösen das neue Integral, wobei  $\frac{x^2}{1+x^2}$  durch  $\frac{1+x^2-1}{1+x^2}$  ersetzt wird:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int 1 - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x$$

Wieder in die Lösung der partiellen Integration eingesetzt erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}\int x \arctan(x)dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2}x \quad \square\end{aligned}$$

## 3 Beispiel 43

### Angabe

$$\int x(\ln x)^2 dx$$

### Grundlagen

**Partielle Integration:**  $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

**Kettenregel des Differenzierens:**  $F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

### Lösung

Partielle Integration mit  $f'(x) = x$  und  $g(x) = (\ln(x))^2$ .  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ .  $g'(x)$  wird mittels der Kettenregel bestimmt:

$$g'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = 2 \frac{\ln x}{x}$$

Nun wird wiederholt partiell integriert:

$$\begin{aligned}\int x(\ln x)^2 &= \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 2 \frac{\ln x}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot \ln x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{x^2}{4} = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot ((\ln x)^2 - \ln x + 1/2) \quad \square\end{aligned}$$

## 4 Beispiel 45

### Angabe

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

### Grundlagen

**Substitutionsregel:**  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$  wobei  $F'(x) = f(x)$

**Partialbruchzerlegung**

**Logarithmusgesetz:**  $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

### Lösung

Substitution:

$$\begin{aligned} z = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow x = z^2 - 1 \\ x' = \frac{dx}{dz} = 2z &\Leftrightarrow dx = 2z dz \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{z}{z^2 - 1} 2z dz$$

Vereinfachen von  $\frac{z^2}{z^2-1}$ :

$$\frac{z^2}{z^2 - 1} = \frac{z^2 - 1 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1} + \frac{1}{z^2 - 1} = 1 + \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}$$

Und den letzten Term per Partialbruchzerlegung (2. Methode) aufteilen:

$$\frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)} = \frac{A}{z+1} \cdot \frac{B}{z-1}$$

$$1 = A(z-1) + B(z+1)$$

$$z = -1: \quad 1 = -2A + 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$z = +1: \quad 1 = 0 + 2B \quad \Rightarrow B = +\frac{1}{2}$$

Nun wird das ganze wieder in das substituierte Integral eingefügt:

$$\begin{aligned} &2 \cdot \left( \int 1 dz - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z+1} dz + \frac{1}{2} \int \frac{1}{z-1} dz \right) = \\ &= 2 \cdot \left( z - \frac{1}{2} \cdot \ln(z+1) + \frac{1}{2} \cdot \ln(z-1) \right) = \\ &= 2 \cdot z - (\ln(z+1) - \ln(z-1)) \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Logarithmen  $\ln(z+1) - \ln(z-1) = \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

$$= 2 \cdot z - \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Und rückschrittlich von  $x$ :

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{x+1} - \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right) = \\ &= 2\sqrt{x+1} - \ln\left(1 + \frac{2}{x}(\sqrt{x+1}+1)\right) \square \end{aligned}$$

## 5 Beispiel 46

**Angabe**

$$\int (x^2 + 1)e^{-2x} dx$$

**Grundlagen**

**Partielle Integration:**  $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

**Lösung**

Partielle Integration mit  $f'(x) = e^{-2x}$  und  $g(x) = x^2 + 1$ :

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) + \int e^{-2x} \cdot x \end{aligned}$$

Wiederum partiell integrieren, wobei  $f'(x) = e^{-2x}$  und  $g(x) = x$ :

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) + \int e^{-2x} \cdot x = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot 1\right) = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x + \frac{1}{2} \int e^{-2x}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \left(x^2 + 1 + x + \frac{1}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \left(x^2 + x + \frac{3}{2}\right) \quad \square \end{aligned}$$